Algebra en Meetkunde 2007

H. Waalkens

university of groningen

Exam Problem Sheet

The exam consists of 8 problems. You can achieve 70 points in total.
The number of points for each problem is marked in brackets (you get 7 points for free).
You can find the translation of the problems into Dutch below.

1. [**3+3+3 Points.**] A *Boolean ring* is a ring R which has the property that $x^2 = x$ for all $x \in R$.
   (a) Show that $x + x = 0$ for all x in a Boolean ring R.
   (b) Show that every Boolean ring is commutative.
   (c) Suppose the Boolean ring R is a field. Prove: $R \cong \mathbb{F}_2$.

2. [**2+3 Points.**]
   (a) Give the definition of an ideal.
   (b) Let R be a ring and $I, J \subset R$ ideals. Prove that
   $$(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J) + (J \cdot I)\,.$$

3. [**4+4+4 Points.**] Let K be a field. The *ring of dual numbers* over K with notation $K[\epsilon]$ consists of expressions of the form $a + b\,\epsilon$ with $a, b \in K$ which are added and multiplied in the following way:
   $$\begin{aligned}(a + b\,\epsilon) + (c + d\,\epsilon) &= (a + c) + (b + d)\,\epsilon\,,\\ (a + b\,\epsilon) \cdot (c + d\,\epsilon) &= (ac) + (ad + bc)\,\epsilon\end{aligned}$$
   (i.e. $\epsilon^2 = 0$), for $a, b, c, d \in K$.
   (a) Prove that $K[\epsilon] \cong K[X]/(X^2)$.
   (b) Prove that $K[\epsilon]$ has exactly *three* ideals.
   (c) Prove that $K[\epsilon]^* \cong K^* \times K^+$ (as groups).

4. [**12 Points.**] Prove the following theorem (*Chinese remainder theorem for non-commutative rings*): Let R be a non-commutative ring with 1, and I, J relatively prime ideals of R (i.e. $I + J = R$). Then
   $$I \cap J = I \cdot J + J \cdot I\,,$$
   and there is a ring isomorphism
   $$R/(I \cdot J + J \cdot I) \to (R/I) \times (R/J), \qquad a + (I \cdot J + J \cdot I) \mapsto (a + I, a + J)\,.$$
   (Hint: Consider the map $\phi : R \to (R/I) \times (R/J)$, $a \mapsto (\phi_I(a), \phi_J(b))$ where ϕ_I (resp. ϕ_J) is the canonical projection $R \to R/I$ (resp. $R \to R/J$).)

5. **[5 Points.]** Let R be a ring. For $f \in R[X]$ and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, we define $f^{(k)}$ inductively as $f^{(0)} = f$, $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Prove that for all $f, g \in R[X]$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ we have:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(*Leibniz' formula*). (Hint: you may use that $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.)

6. **[4 Points.]** Determine the irreducible polynomials $f \in \mathbb{F}_2[X]$ with $deg(f) \leq 3$.

7. **[4+4 Points.]** Let $R = \{\sum a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \,:\, a_1 = 0\}$.

   (a) Let

   $$\Phi_0 : R \to \mathbb{Q}, \qquad f \mapsto f(0)$$

   be the evaluation homomorphism at 0. Prove that

   $$ker(\Phi_0) = (X^2, X^3) = \{f = X^2 g + X^3 h \,:\, g, h \in R\}\,.$$

   (b) Prove that $ker(\Phi_0)$ is no principal ideal and that $ker(\Phi_0)$ is a maximal ideal.

8. **[4+4 Points.]** Let R be a commutative ring and $I, J \subset R$ ideals with

   $$I + J = R \qquad \text{and let} \qquad i_1 + j_1 = 1 \qquad (i_i \in I, j_1 \in J)\,.$$

   (a) Prove that

   $$\phi : I \oplus J \to R, \qquad (i, j) \mapsto i + j$$

   is a surjective R-module homomorphism with $ker(\phi) \cong I \cap J \cong IJ$ (isomorphic as R-modules).

   (b) Prove that

   $$\psi : I \oplus J \to R \oplus IJ, \qquad (i, j) \mapsto (i + j, ij_1 - ji_1)$$

   is a R-module isomorphism.

Dutch Translation

1. **[3+3+3 Punten.]** Een *Boolese ring* is een ring R waarin geldt $x^2 = x$ voor alle $x \in R$.

   (a) Bewijs: $x + x = 0$ voor alle x in een Boolese ring R.

   (b) Bewijs dat elke Boolese ring commutatief is.

   (c) Stel dat de Boolese ring R een lichaam is. Bewijs: $R \cong \mathbb{F}_2$.

2. **[2+3 Punten.]**

   (a) Geef de definitie van een ideaal.

   (b) Zij R een ring, en $I, J \subset R$ idealen. Bewijs:

   $$(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J) + (J \cdot I)\,.$$

3. **[4+4+4 Punten.]** Zij K een lichaam. De *ring van de duale getallen* over K, notatie: $K[\epsilon]$, bestaat uit de uitdrukkingen $a + b\,\epsilon$, met $a, b \in K$, die als volgt opgeteld en vermeigvuldigd worden:

   $$\begin{aligned}(a + b\,\epsilon) + (c + d\,\epsilon) &= (a + c) + (b + d)\,\epsilon\,, \\ (a + b\,\epsilon) \cdot (c + d\,\epsilon) &= (ac) + (ad + bc)\,\epsilon\end{aligned}$$

   (dus $\epsilon^2 = 0$), voor $a, b, c, d \in K$.

(a) Bewijs: $K[\epsilon] \cong K[X]/(X^2)$.

(b) Bewijs dat $K[\epsilon]$ precies *drie* idealen heeft.

(c) Bewijs: $K[\epsilon]^* \cong K^* \times K^+$ (als groepen).

4. **[12 Punten.]** Bewijs de *Chinese reststelling voor niet-commutatieve ringen:* Laat R een niet-commutatieve ring met 1 zijn, en laat I, J onderling ondeelbare idealen van R zijn (dus $I + J = R$). Dan

$$I \cap J = I \cdot J + J \cdot I\,,$$

en er is een ringisomorfisme

$$R/(I \cdot J + J \cdot I) \to (R/I) \times (R/J), \qquad a + (I \cdot J + J \cdot I) \mapsto (a + I, a + J)\,.$$

(Aanwijzing: Beschouw $\phi : R \to (R/I) \times (R/J)$, $a \mapsto (\phi_I(a), \phi_J(b))$ waarbij ϕ_I (resp. ϕ_J) het canonieke ringhomomorfisme $R \to R/I$ (resp. $R \to R/J$) is.)

5. **[5 Punten.]** Zij R een ring. Voor $f \in R[X]$ en $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiëren we $f^{(k)}$ inductief door $f^{(0)} = f$, $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Bewijs dat voor alle $f, g \in R[X]$ en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(*formule van Leibniz*). (Aanwijzing: Je mag gebruiken dat $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.)

6. **[4 Punten.]** Bepaal alle irreducibele polynomen $f \in \mathbb{F}_2[X]$ met $graad(f) \leq 3$.

7. **[4+4 Punten.]** Zij $R = \{\sum a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \,:\, a_1 = 0\}$.

(a) Zij

$$\Phi_0 : R \to \mathbb{Q}, \qquad f \mapsto f(0)$$

het evaluatiehomomorfisme in 0. Bewijs dat

$$ker(\Phi_0) = (X^2, X^3) = \{f = X^2 g + X^3 h \,:\, g, h \in R\}\,.$$

(b) Bewijs dat $ker(\Phi_0)$ geen hoofdideaal is, maar $ker(\Phi_0)$ wel een maximal ideaal is.

8. **[4+4 Punten.]** Zij R een commutatieve ring en laat $I, J \subset R$ idealen zijn met

$$I + J = R \qquad \text{en laat} \qquad i_1 + j_1 = 1 \qquad (i_i \in I, j_1 \in J)\,.$$

(a) Bewijs dat

$$\phi : I \oplus J \to R, \qquad (i, j) \mapsto i + j$$

een surjectief R-moduulhomomorfisme is met $ker(\phi) \cong I \cap J \cong IJ$ (isomorfisme van R-modulen).

(b) Bewijs dat

$$\psi : I \oplus J \to R \oplus IJ, \qquad (i, j) \mapsto (i + j, ij_1 - ji_1)$$

een R-moduulisomorfisme is.